

Çevrimiçi Servisler için Ayrışım Tabanlı Tavsiye Sistemi

A Factorization Based Recommender System for Online Services

Umut Şimşekli*, Tolga Birdal†, Emre Koç†, Ali Taylan Cemgil*

*: Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul, Türkiye

{umut.simsekli, taylan.cemgil}@boun.edu.tr

†: Gravi Bilişim Teknolojileri, İstanbul, Türkiye

{tolga, emre}@gravi.com.tr

Özetçe —Otomatik tavsiye sistemleri internetin hızla gelişmesiyle birlikte sıkça kullanılmaya başlamıştır. Negatif olmayan matris ayrışımı (NOMA) başta olmak üzere, ayrışım tabanlı modeller kolay anlaşılır ve uygulanabilir olmaları nedeniyle tavsiye sistemlerinde kullanılan başlıca modellerdir. Biz bu çalışmamızda ayrışım tabanlı tavsiye sistemlerinin çevrimiçi servisler için nasıl kullanılacağı ve NOMA tabanlı bir sistemde model parametrelerinin nasıl seçilmesi gerektiği üzerine yoğunlaşıyoruz. İlk olarak herhangi bir ayrışım modelinin kullanılabilmesi için genel bir sistem mimarisi sunuyoruz. Daha sonra, NOMA modelinin veriyi ne kadar iyi modelleyebildiğini sınamak amacıyla bir yemek sipariş servisinden alınan gerçek veriyi değişik oranlarda rastgele silip NOMA modeli vasıtasıyla geriçatıyoruz. Farklı parametreler ve farklı iraksaylar için geriçatımdan elde edilen ortalama kare hataları sunuyoruz.

Anahtar Kelimeler—*Negatif Olmayan Matris Ayrışımı (NOMA), Tavsiye Sistemleri, Çevrimiçi Servisler*

Abstract—Along with the growth of the Internet, automatic recommender systems have become popular. Due to being intuitive and useful, factorization based models, including the Nonnegative Matrix Factorization (NMF) model, are one of the most common approaches for building recommender systems. In this study, we focus on how a recommender system can be built for online services and how the parameters of an NMF model should be selected in a recommender system setting. We first present a general system architecture in which any kind of factorization model can be used. Then, in order to see how accurate the NMF model fits the data, we randomly erase some parts of a real data set that is gathered from an online food ordering service, and we reconstruct the erased parts by using the NMF model. We report the mean squared errors for different parameter settings and different divergences.

Keywords—*Nonnegative Matrix Factorization (NMF), Recommender Systems, Online Services*

I. GİRİŞ

Çevrimiçi satış sistemlerinin gelişmesi ve popülerleşmesiyle birlikte, kullanıcılara doğru ürünleri otomatik bir şekilde tavsiye etme işi önem kazandı. Başarımının ölçülmesindeki

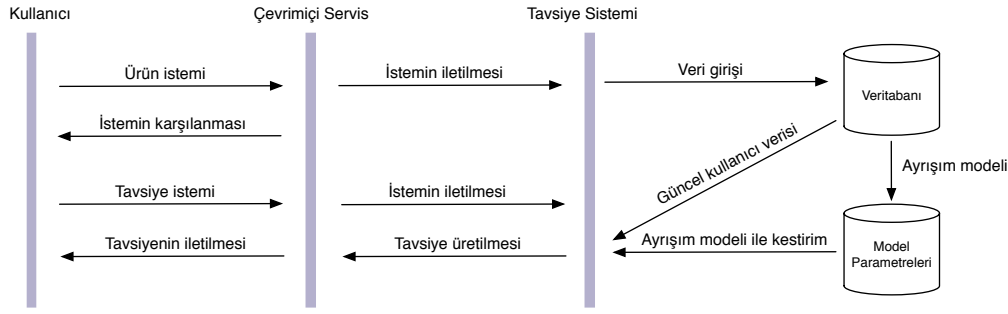
belirsizlik, değişik uygulamaların değişik özellikler gerektirmesi ve hızla artan çevrimiçi verinin verimli yöntemler gerektirmesi gibi sebeplerden dolayı literatürde birçok değişik tavsiye sistemi önerilmiştir. Bu sistemler Netflix¹ ve Amazon² gibi kurumsal firmaların altyapılarında yerlerini bulmuştur. Hali hazırda, bu tavsiye sistemleri literatürde aktif bir konu olup, birçok kurumsal organizasyonun da ARGE projelerinde yer almaktadır [1].

Otomatik tavsiye sistemleri genel olarak iki başlık altında toplanabilir: İşbirlikçi (collaborative) ve içerik tabanlı (content-based). İşbirlikçi tavsiye sistemlerinde amaç, bir kullanıcıya kendisine benzer kullanıcıların aktivitelerini göz önünde bulundurarak tavsiye vermektir. İçerik tabanlı tavsiye sistemlerinde ise amaç, belirli bir kullanıcının aktiviteleri ve bu aktivitelerin ürün özellikleriyle olan ilişkisini göz önüne alarak tavsiye vermektir. Bu iki çeşidi kaynaştırmak suretiyle oluşturulan melez modeller de son zamanlarda önem kazanmaktadır [2].

İşbirlikçi tavsiye sistemleri ilk bakışta işlem olarak oldukça masraflı görünmektedir. M kullanıcı sayısı, N ürün sayısı olduğunda, bu masraf $O(MN)$ olmaktadır. Bu da her müşteri için her ürünü değerlendirmek anlamındadır. Bu masrafın üstesinden gelebilmek için, ayrışım tabanlı modeller işbirlikçi tavsiye sistemlerinde sıkça kullanılmaktadır. Bu modeller gerek sezgisel olmaları gerekse kolay uygulanabilir olmaları nedeniyle son yıllarda sıkça kullanılmaya başlamıştır. Örnek bir ayrışım tabanlı tavsiye sisteminin çalışma mantığı genel olarak şu şekilde özetlenebilir: Belirli bir süre toplanmış kullanıcı-ürün ilişkisine dair veri, bir X matrisi şeklinde ifade edilir. Bu matrisin satırları ürünleri, sütunları kullanıcıları, elemanları ise kullanıcıların ürünlerle olan ilişkisini göstermektedir. Örneğin bir film tavsiye sisteminde X matrisininin satırları filmleri, sütunları kullanıcıları temsil etmektedir. Öte yandan, $X(i, j)$ elemanı j kullanıcısının i filmi kaç kez izlediğini (ya da izleyip izlemediğini) gösterir. Daha sonra X matrisinin bilinmeyen kısımları bir ayrışım modeli kullanılarak kestirilmeye çalışılır. Eğer veride ürün-kullanıcı ilişkisinden daha karmaşık bir ilişki varsa X matris yerine tensör şeklinde

¹<http://www.netflix.com>

²<http://www.amazon.com>



Şekil 1. Çevrimiçi tavsiye mimarisine ait sıralı çizeneğin.

de ifade edilebilir.

Literatürde çok sayıda ayrışım tabanlı tavsiye sistemi çalışması bulunmaktadır. Rennie ve Srebro [3]'te Enbüyük Pay Matris Ayrışımı (Maximum Margin Matrix Factorization) modeli ile bir tavsiye sistemi geliştirmiş ve başarımı iki farklı film veritabanında ölçmüşlerdir. Takács v.d. [4]'te birden fazla matris ayrıştırma yöntemini ve bu yöntemlere yaptıkları geliştirmeleri film veritabanlarında sınamışlardır. Tavsiye sistemleri hakkında daha fazla bilgiye [5]'ten ulaşılabilir.

Biz bu çalışmamızda ayrışım tabanlı tavsiye sistemlerinin çevrimiçi servisler için nasıl kullanılacağı ve NOMA tabanlı bir sistemde model parametrelerinin nasıl seçilmesi gerektiği üzerine yoğunlaşıyoruz. İlk olarak herhangi bir ayrışım modelinin kullanılabilmesi için genel bir sistem mimarisi sunuyoruz. Daha sonra, NOMA modelinin veriyi ne kadar iyi modelleyebildiğini sınamak amacıyla gerçek bir yemek sipariş servisinde alınan veriyi değişik oranlarda rastgele silip NOMA modeli vasıtasıyla geriçatıyoruz. Farklı parametreler ve farklı gözlem modelleri için ortalama kare hataları sunuyoruz.

II. ÇEVİRİMİÇİ TAVSİYE MİMARİSİ

İnternetin yaygınlaşmasıyla birlikte çevrimiçi servisler de yaygınlaşmış ve bazı servisler gündelik hayatın bir parçası haline gelmiştir. Ancak otomatik tavsiye sistemleri, çevrimiçi servisler için çok daha yeni olduğundan, birçok servis sağlayıcının teknik altyapısı otomatik bir tavsiye sistemi göz önünde bulundurularak oluşturulmamıştır. Bu yüzden tavsiye sistemini halihazırdaki çevrimiçi servis altyapısı üzerinde inşa etmek yerine ayrı bir blok olarak tasarlamak daha akılcı olacaktır.

Biz bu bölümde herhangi bir ayrışım modelinin kullanılabilmesi için genel bir sistem mimarisi sunuyoruz. Bu mimarideki temel fikirler şu şekilde özetlenebilir:

- Çevrimiçi servis kullanıcılarından kendisine gelen istemleri tavsiye sistemine iletir
- Tavsiye sistemi bu verileri kendi veritabanında biriktirir
- Ayrışım modelini büyük veri üzerinde çalıştırmak maliyetli olduğundan, belirli sıklıklarla ayrışım modeli çalıştırılıp parametreleri kaydedilir
- Bir kullanıcı tavsiye isteminde bulunduğu anda çevrimiçi servis, istemi tavsiye sistemine iletir ve tavsiye oluşturulup kullanıcıya ulaştırılır

Önerilen mimariyi daha iyi anlatabilmek amacıyla Şekil 1'de mimariye ait sıralı çizeneğin (sequential diagram) gösterilmiştir.

Çevrimiçi servis ve tavsiye sisteminin haberleşmesi için basit bir web servisi kullanılabilir. Önerdiğimiz mimari için web servisinde iki farklı yöntemin yerleştirilmesi yeterli olacaktır. İlk yöntem çevrimiçi servisten iletilen ürün istemini veritabanına işlerken, ikinci yöntem kullanıcı kimliği verildiğinde tavsiye edilecek ürün kimliklerini geri döndürmelidir.

III. NOMA TABANLI TAVSİYE SİSTEMİ

Negatif Olmayan Matris Ayrışımı (NOMA) modeli ayrışım tabanlı tavsiye sistemlerinde en sık kullanılan modellerden biridir. Bu bölümde NOMA modeli kullanarak oluşturduğumuz tavsiye sistemini anlatacağız.

NOMA modeli matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [6]:

$$X(i, j) \approx \hat{X}(i, j) = \sum_k Z_1(i, k)Z_2(k, j). \quad (1)$$

Burada X , \hat{X} , Z_1 ve Z_2 negatif olmayan matrislerdir. X matrisinin kullanıcı ürün ilişkisini temsil ettiği göz önünde bulundurulursa, Z_1 matrisi ürünlerin diğer ürünlerle olan ilişkisini modellemektedir. Dolayısıyla X matrisine düşük kerteli bir yaklaşım yapıldığında, Z_1 matrisinin sütunlarında hangi ürünlerin birlikte tercih edildiği bilgisi yer alacaktır.

NOMA modelinde amaç, bir X matrisi gözlemlendiğinde Z_1 ve Z_2 etkenlerini kestirebilmektir. Bu problemi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

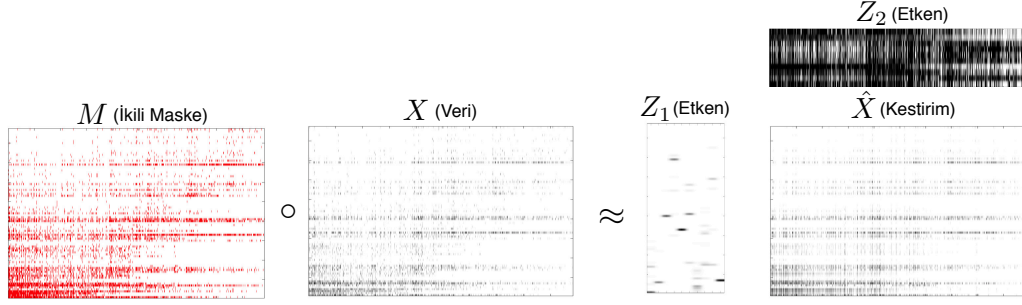
$$(Z_1, Z_2)^* = \arg \min_{Z_1, Z_2} d(X || \hat{X}). \quad (2)$$

Burada $d(\cdot)$ seçilecek herhangi bir iraksay olabilir. Öklid, Kullback-Leibler, Itakura-Saito iraksayları NOMA modelinde sıkça kullanılmaktadır.

NOMA modelinde çıkarım yapma problemine olasılıksal modelleme açısından da bakılabilir. Bu kez amaç X ve \hat{X} arasındaki iraksayı enküçültmeye çalışmak yerine bir olasılıksal model tanımlayıp, bu modelde olabilirliği enbüyütmeye çalışmak olacaktır. Örnek bir olasılıksal NOMA modelini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$X | Z_1, Z_2 \sim \prod_i \prod_j p(X(i, j); \hat{X}(i, j))^{M(i, j)}. \quad (3)$$

Burada $p(\cdot, \cdot)$ kullanılan gözlem modelidir. Herbir $X(i, j)$ elemanı birbirinden bağımsız kabul edildiğinden birleşik dağılım



Şekil 2. Negatif Olmayan Matris Ayrışımı modeli. Kullanıcı-ürün ilişkisinin bulunduğu X matrisi Z_1 ve Z_2 etkenlerine ayrıştırılmaktadır. Z_1 matrisi tavsiye sistemi için oldukça önemli olup, sütunlarında hangi ürünlerin birlikte tercih edildiği bilgisi yer almaktadır. M matrisi X üzerinde ikili bir maske olup X matrisinin kestirilerek istenen kısımlarını göstermektedir. Bu örnekte M matrisinin kırmızı ile gösterilen kısımları bire eşittir ve X matrisinin sadece bu kısımları gözlemlenmiş varsayılmıştır.

yukarıdaki çarpım formunda yazılabilmektedir. Ayrıca, M ikili bir matris olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$M(i, j) = \begin{cases} 1, & X(i, j) \text{ gözlemlenmişse,} \\ 0, & X(i, j) \text{ gözlemlenmemişse.} \end{cases} \quad (4)$$

Yılmaz v.d., [7]'de bağışlı ayrışım modellerinde çıkarım yapmak için genelleştirilmiş bir yöntem önermişlerdir. Bu yöntem kullanılarak birçok popüler gözlem modeli tek bir algoritma çatısı altında birleştirilebilmektedir. Bu yöntem baz alındığında aşağıda verilen güncelleme denklemleri yinelemeli olarak uygulanarak NOMA modelinde çıkarım yapılabilir:

$$Z_1 \leftarrow Z_1 \circ \frac{(M \circ X \circ \hat{X}^{-p})Z_2^\top}{(M \circ \hat{X}^{1-p})Z_2^\top}, \quad (5)$$

$$Z_2 \leftarrow Z_2 \circ \frac{Z_1^\top (M \circ X \circ \hat{X}^{-p})}{Z_1^\top (M \circ \hat{X}^{1-p})}. \quad (6)$$

Burada $A \circ B$, $\frac{A}{B}$, A^\top ve A^p sırasıyla A ve B matrislerinin eleman eleman çarpımı (Hadamard çarpımı, ya da iç çarpım), eleman eleman oranı, A matrisin devriği ve eleman eleman üssünü temsil etmektedir. Öte yandan p değişkeni kullanılacak gözlem modelini belirlemektedir: $p = \{0, 1, 2, 3\}$ değerleri sırasıyla Gauss, Poisson, Gamma ve ters Gauss dağılımlarına denk gelmektedir. Bu değerler dışında ise, $p \in (1, 2)$ değerleri için gözlem modeli bileşik Poisson dağılımı olmaktadır [8]. Şekil 2 NOMA modelini görselleştirmektedir.

Öte yandan, probleme tekrar eniyileme bakış açısıyla bakacak olursak (bkz. Denklem 2), bahsettiğimiz olabirlikleri enbüyütmek, $p = \{0, 1, 2\}$ değerleri için sırasıyla β iraksayının özel durumları olan Öklid, Kullback-Leibler ve Itakura-Saito iraksayılarını enküçültmeye denk gelmektedir.

A. NOMA Modelinin Tavsiye Sistemlerinde Kullanımı

NOMA tabanlı tavsiye sistemlerinde temel fikir, eğer X matrisinin herhangi bir elemanı $X(i, j) = 0$ ise j kullanıcısı ve i ürünü arasında bir ilişkinin henüz olmadığını, dolayısıyla $X(i, j)$ elemanının aslında gözlemlenmediğini varsayıp, çıkarımı yaparken bu bilgiyi göz önünde bulundurmaktır. Bu varsayım doğrultusunda M matrisi aşağıdaki gibi oluşturulmalıdır:

$$M(i, j) = \begin{cases} 1 & X(i, j) > 0, \\ 0 & X(i, j) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Tavsiye sistemindeki bir sonraki adım, gözlemlenen X ve oluşturulan M matrislerini kullanarak en iyi Z_1^* ve Z_2^* etkenlerini 5 ve 6 numaralı denklemleri yinelemeli olarak hesaplayarak kestirmektir. Bu etkenler kestirildikten sonra $p(X(i, j)|Z_1^*, Z_2^*)$ dağılımının ortalaması olan $\hat{X}(i, j)$ değerini kullanarak daha önce gözlemlenmemiş olarak işaretlenen ($M(i, j) = 0$) kısımları kestirebiliriz. Son olarak, eğer kestirilen değer $\hat{X}(i, j)$ belirli bir eşik değerinden büyükse j kullanıcısına i ürünü tavsiye edilebilir.

Giriş bölümünde de bahsettiğimiz gibi, eğer veride ürün-kullanıcı ilişkisinden daha karmaşık bir ilişki varsa X , matris yerine tensör şeklinde de ifade edilebilir. Bu durumda matris ayrışım yöntemleri yetersiz kalacağı için daha karmaşık tensör ayrışım modellerine başvurmak gerekmektedir. Ancak [7]'de önerilen çıkarım algoritması herhangi bir tensör ayrışım modeline uygulanabileceği için ayrışım modelinin değişmesi tavsiye oluşturma sürecini etkilemeyecektir. Daha karmaşık tensör ayrışım modellerinde çıkarım yapmak için daha detaylı bilgiye [7]'den ulaşılabilir.

IV. DENEYLER

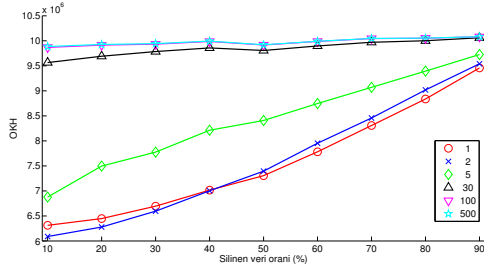
Bu bölümde NOMA modelinin değişik parametre düzenlemlerinde tavsiye başarısını değerlendirmek için düzenlediğimiz çeşitli deneyleri ve sonuçlarını sunuyoruz. Tavsiye oluşturma probleminde tek bir doğru sonuç olmadığı için tavsiye sistemlerini sınamak oldukça zor bir görevdir.

Tavsiye sistemlerini sınamak için sıkça kullanılan yöntemlerden biri, X matrisinin sıfırdan farklı olan kısımlarını belirli bir oranda rastgele silip, daha sonra tavsiye sistemi vasıtasıyla bu silinen kısımları geriçatmaktır. Bu yöntemde tavsiye sisteminin başarımını geriçatımın Ortalama Kare Hata (OKH) değeri şeklinde belirtebiliriz. Bu ölçüt matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\text{OKH} = \frac{\sum_{i,j} [X(i, j) > 0] (X(i, j) - \hat{X}(i, j))^2}{\sum_{i,j} [X(i, j) > 0]}. \quad (8)$$

Burada $[\cdot]$ gösterge işlevi olup şu şekilde tanımlanmıştır:

$$[x] = \begin{cases} 1 & x \text{ doğru ise,} \\ 0 & x \text{ yanlış ise.} \end{cases} \quad (9)$$



Şekil 3. k indisinin değişik nicelik değerleri ($|k|$) ve silinen verinin değişik oranlarına bağlı OKH değerleri. Bu örnekte $|p| = 1.3$ olarak sabitlenmiştir. En iyi sonuçlar düşük silinme oranlarında $|k| = 2$ durumunda alınırken, yüksek silinme oranlarında $|k| = 1$ durumunda alınmıştır. Bu durumda verinin düşük kerteli bir yaklaşımla daha iyi ifade edilebildiği söylenebilir.

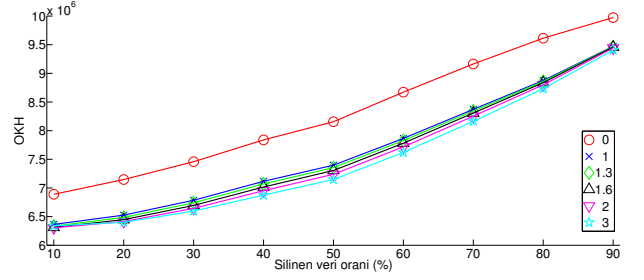
Deneylerimizi bir yemek sipariş servisinde alınan gerçek veri üzerinde gerçekleştiriyoruz. Bu veri İstanbul'un belirli bir bölgesinden belirli bir süre toplanmış kullanıcı-restoran ilişkisini içermektedir. Veride toplam 87 restoran 4923 kullanıcı bulunmaktadır. Bu veri matrisi cinsinden ifade edildiğinde %89'u sıfır olan 87×4923 boyutunda seyrek bir X matrisi elde edilmektedir. X matrisinin elemanları kullanıcıların restoranlardan o süre içerisinde kaç defa sipariş verdiğini göstermektedir.

Kurulacak öneri sisteminde amaç, kullanıcıya daha önce sipariş vermediği ancak ilgilenebileceği bir restoran önermektir. Şekil 2'ye tekrar gözetilecek olursak, X matrisi NOMA modeli ile ayrıştırıldığında, Z_1 etkeninin sütunlarının hangi restoranların birlikte tercih edildiğini gösterdiğini gözlemleyebiliriz. Bu sayede, X matrisinin gözlemlenmeyen kısımları geriçatıldığında bir kullanıcının daha önce sipariş vermediği hangi restoranlarla ilgilenebileceği bilgisine ulaşabiliriz.

Deneylerimizde NOMA modelini kullanıcı-restoran verisi üzerinde değişik parametrelerle sınıyoruz. Veriyi değişik oranlarda sildikten sonra, ilk olarak geriçatım başarımında Z_1 ve Z_2 etkenlerinin büyüklüğünü belirleyen k indisinin niceliğinin (cardinality) etkisini ölçüyoruz. Daha sonra, olsalsal modelde kullandığımız gözlem modelini belirleyen p parametresinin etkisini ölçüyoruz. Her parametre ve silinme oranı seçimi için verinin sıfırdan farklı olan kısımlarını seçilen oranda rastgele silip daha sonra NOMA modelini kullanarak geriçatıyoruz. Bu işlemi 20 kez tekrarlayıp OKH ortalamasını ölçüyoruz. Şekil 3 ve Şekil 4'te bu parametreleri sınıadığımız deney sonuçları gösterilmiştir.

Şekil 3'te açıkça görüldüğü üzere, k indisinin niceliği ($|k|$) artırıldıkça geriçatımın başarımı düşmektedir. En iyi sonuçlar silinen veri oranına bağlı olarak $|k| = 1$ ve $|k| = 2$ durumlarında elde edilmektedir. Dolayısıyla, verinin aslında düşük kerteli olduğu ve düşük kerteli bir yaklaşımla daha iyi ifade edilebildiği sonucunu çıkarabiliriz.

Şekil 4'te seçilen gözlem modelinin geriçatım başarımına olan etkisi gösterilmiştir. Değişik p değerleri için genelde benzer sonuçlar elde edilirken, Gauss dağılımı ($p = 0$) en kötü sonucu vermektedir. En iyi sonuç ise ters Gauss dağılımı ile ($p = 3$) elde edilmektedir.



Şekil 4. Değişik p değerleri ve silinen verinin değişik oranlarına bağlı OKH değerleri. Bu örnekte $|k| = 1$ olarak sabitlenmiştir. p parametresinin değeri arttıkça başarımın arttığı gözlemlenmektedir. En iyi başarımlar $p = 3$ (ters Gauss dağılımı) durumunda elde edilmiştir.

V. VARGILAR

Bu çalışmada çevrimiçi servisler için ayrışım tabanlı bir tavsiye sistemi sunduk. İlk olarak herhangi bir ayrışım modelinin kullanılabilirliği genel bir sistem mimarisini sunduk. Bu mimarinin temel özelliği oluşturulacak tavsiye sistemini ilgili çevrimiçi servisin altyapısı üzerinde inşa etmek yerine ayrı bir blok olarak tasarlamasıdır. Ayrışım modellerinin bu mimaride nasıl kullanılacağını anlattıktan sonra popüler bir ayrışım modeli olan NOMA modeli ile nasıl tavsiye sistemi oluşturulacağı üzerinde durduk.

NOMA modelinin veriyi ne kadar iyi modelleyebildiğini sınamak amacıyla gerçek bir yemek sipariş servisinde alınan veriyi değişik oranlarda rastgele silip NOMA modeli vasıtasıyla geriçattık. Farklı parametreler ve farklı gözlem modelleri için ortalama kare hataları sunduk. En iyi sonuçları k indisinin niceliğinin düşük olduğu ve p parametresinin büyük olduğu durumlarda elde ettik. Buradan verinin düşük kerteli ancak büyük değişintili bir yaklaşımla daha iyi ifade edilebileceği sonucu çıkarılabilir.

Teşekkür: Deneylerde kullanılan veri kümesini sağlayan Üniversite Yemek Org. ve Bil. Hiz. Tic. Ltd. Şti.'ne (<http://www.uniyemek.com>) teşekkür ederiz. Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 110E292 nolu araştırma projesi kapsamında desteklenmektedir. Umut Şimşekli'nin çalışması TÜBİTAK BİDEB 2211 bursuyla desteklenmektedir.

KAYNAKÇA

- [1] D. Stern, R. Herbrich ve T. Graepel, *Matchbox: Large Scale Bayesian Recommendations*, Proceedings of the 18th International World Wide Web Conference, 2009
- [2] G. Shani ve A. Gunawardana *Evaluating Recommendation Systems*, Recommender Systems Handbook, Springer, 2011
- [3] J. D. M. Rennie ve N. Srebro, *Fast maximum margin matrix factorization for collaborative prediction*, International Conference on Machine Learning (ICML), 2005.
- [4] G. Takács, I. Pilászy, B. Németh, ve D. Tikk, *Scalable Collaborative Filtering Approaches for Large Recommender Systems*, Journal of Machine Learning Research, 2009.
- [5] D. Jannach, M. Zanker, A. Felfernig ve G. Friedrich, *Recommender Systems: An Introduction*, Cambridge University Press, New York, NY, ABD, 2010.
- [6] D. D. Lee, H. S. Seung, "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization.," *Nature*, vol. 401, pp. 788–791, 1999.
- [7] Y. K. Yılmaz, A. T. Cemgil ve U. Şimşekli, *Generalised Coupled Tensor Factorisation*, Neural Information Processing Systems (NIPS), 2011.
- [8] B. Jørgensen, *The Theory of Dispersion Models*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, 1997.